

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ Ι (MAY611)

25 Σεπτεμβρίου 2024

Θέμα 1. [1.5]

Δίνεται το σύνολο $A = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Log} z| < 1, z = \lambda \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \lambda > 0\}$. Προσδιορίστε όλα τα $\lambda > 0$ για τα οποία $z \in A$ και περιγράψτε το σύνολο A γεωμετρικά ή σχεδιάστε το κατά προσέγγιση.

Θέμα 2. [1.5]

Δίνεται η ακολουθία $z_n = a^n \left(i + \cos \frac{n\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $a \in \mathbb{C}$ σταθερό. Εξετάστε για ποια $a \in \mathbb{C}$ υπάρχει το αντίστοιχο όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ και προσδιορίστε το.

Θέμα 3. [1.5+1=2.5]

(α') Δώστε τον ορισμό της συνάρτησης $f(z) = \sin z$, $z \in \mathbb{C}$, ως κατά σημείο όριο δυναμοσειράς, και χρησιμοποιήστε τον για να δείξετε ότι η f είναι ακέραια συνάρτηση.

(β') Είναι η συνάρτηση αυτή φραγμένη; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

Θέμα 4. [1]

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$, όπου γ η πολυγωνική γραμμή που ενώνει κατά σειρά τα σημεία $-1 - i$, $1 - i$, $1 + i$, $-1 + i$.

Θέμα 5. [1+1=2]

(α') Βρείτε το μέγιστο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\tan z$ στο \mathbb{C} .

(β') Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $J = \int_{\gamma} \tan z dz$, όπου γ ο αρνητικά προσανατολισμένος απλός κλειστός κύκλος κέντρου $2\pi i$ και ακτίνας π .

Θέμα 6. [1.5]

Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(z) = \frac{z^2+z-2}{(z+2)^2}$. Βρείτε το μέγιστο πεδίο ορισμού της f στο \mathbb{C} , εξετάστε αν η f έχει μεμονωμένες ανωμαλίες και χαρακτηρίστε τις.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες. ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΤΕ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!